UFCG/CCT/Unidade Acadêmica de Matemática Período: 2025.2

DISCIPLINA: CÁLCULO DIFERENCIAL.E INTEGRAL I **Turma 01**

PROFESSOR: JOSÉ LUIZ NETO **Lista 2**

Continuidade e Derivada

Aviso:
Você pode encontrar nesta lista questões repetidas. No entanto, um dos objetivos da lista é você identificar se a questão já foi apresentada antes. Cuidado! muitas questões são apenas parecidas. Uma das maneiras de aprender é repetindo. Exercite esta forma de estudar/aprender. A lista está devidida por assunto.

C o n t i n u i d a d e

1. Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} -3, & \text{se} \quad x < -1 \\ x^2+1, & \text{se} \quad -1 \leq x < 0 \\ \dfrac{(x+1)(x-2)}{x-2}, & \text{se} \quad 0 \leq x < 3 \\ 4, & \text{se} \quad x \geq 3 \end{cases}$.

(a)Determine o domínio e a imagem de f; (b) Esboce o gráfico de f; (c) f é contínua em $x = -1$? e em $x = 2$? Justifique; (d) f é contínua no intervalo fechado $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$? Justifique.

2. Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{se} \quad x < -1 \\ 1-x^2, & \text{se} \quad -1 \leq x < 0 \\ \dfrac{(1-x)(x-1)}{x-1}, & \text{se} \quad 0 \leq x < 3 \\ -2, & \text{se} \quad x \geq 3 \end{cases}$.

(a)Determine o domínio e a imagem de f; (b)Esboce o gráfico de f; (c) f é contínua em $x = -1$? e em $x = 2$? Justifique; (d) f é contínua no intervalo fechado $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$? Justifique.

3. Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} -2, & \text{se} \quad x \leq -1 \\ ax+b, & \text{se} \quad -1 < x < 3 \\ 2, & \text{se} \quad x \geq 3 \end{cases}$.

(a) Determine os valores de a e de b, tais que f seja contínua para todo x.

(b) Reescreva a função f com os valores de a e de b e, em seguida, esboce o gráfico de f e escreva a imagem de f.

4. Dada a função f definida por $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \text{se} \quad x < 2 \\ x-5, & \text{se} \quad x > 2 \\ 0, & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$.

(a) Esboce o gráfico de f e determine a imagem de f.

(b) Verifique se f é contínua em $x = 2$.

5. Dada a função f definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+3x+1}{x+1}, & \text{se} \quad x \neq -1 \\ 3, & \text{se} \quad x = -1 \end{cases}$.

(a) Verifique se f é contínua em $x = -1$.

(b) Esboce o gráfico de f e escreva a imagem de f.

6. Dada a função f definida por $f(x) = \begin{cases} 3-x^2, & \text{se} \quad x \leq 1 \\ 1+x^2, & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$.

(a) Mostre que f é contínua em $x = 1$.

(b) Esboce o gráfico de f e escreva a imagem de f.

7. Determine $k \in \mathbb{R}$ tal que a função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen2x}{5x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ k & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$ seja contínua em $x = 0$.

8. Justifique por quê a função $f(x) = \begin{cases} 3+x \text{ se } x \leq 1 \\ 3-x \text{ se } x > 1 \end{cases}$ não é contínua em $x = 1$.

9. Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{se} \quad x \leq -2 \\ ax+b, & \text{se} \quad -2 < x < 4 \\ -3, & \text{se} \quad x \geq 4 \end{cases}$.

(a) Determine os valores de a e de b, tais que f seja contínua para todo x.

(b) Reescreva a função f com os valores de a e de b e, em seguida, esboce o gráfico de f e escreva a imagem de f.

10. Dadas as funções $f(x) = \dfrac{x^4+4}{3x^3+9x}$ e $g(x) = \dfrac{\sqrt{2}x^2+3}{x^2-3x-10}$.

(a) Determine o(os) valor(es) de x para o qual(ais) a função dada não é contínua.

(b) O gráfico da função dada possui assíntotas horizontais e verticais? Quais? Justifique.

11. Dadas as funções$f(x) = \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^3 - 1}$ e $g(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x^2 + 7x + 12}$.

(a) Determine o(os) valor(es) de x para o qual(ais) a função dada não é contínua.

(b) O gráfico da função dada possui assíntotas horizontais e verticais? Quais? Justifique.

O Teorema do Valor Intermediário

12. Justifique, usando o Teorema do Valor Intermediário, por que existe $c \in (1,2)$ com $f(c) = 0$, onde $f(x) = x^5 + 2x^4 - 6x^3 + 2x - 3$.

13. Dados $f(x) = 2 + x - x^2$ e o intervalo fechado $[0,3]$. Usando o Teorema do Valor Intermediário mostre que existe pelo menos um valor de c entre 0 e 3 talque $f(c) = 1$.

14. Dados $f(x) = x^2 + 5x - 6$ e o intervalo fechado $[-1,2]$. Usando o Teorema do Valor Intermediário mostre que existe pelo menos um valor de c entre -1 e 2 talque $f(c) = 4$.

15. Usando o Teorema do Valor Intermediário mostre que dados $f(x) = 2 + x - x^2$ e o intervalo fechado $[0,3]$, existe pelo menos um valor de c entre 0 e 3 tal que $f(c) = 1$.

16. Usando o Teorema do Valor Intermediário, mostre que a equação $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ tem ao menos uma solução no intervalo $[0,2]$.

17. Usando o Teorema do Valor Intermediário, mostre que a equação $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$ possui uma raiz no intervalo $(1,2)$.

18. Usando o Teorema do Valor Intermediário, mostre que a equação $x^5 + 3x^2 - 5x - 10 = 0$ possui uma raiz entre 1 e 2.

A Derivada

19. Verifique, usando derivadas laterais, se a função $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se} \quad x < 0 \\ x + 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$ é derivável em $x = 0$.

20. Verifique, usando derivadas laterais, se a função $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se} \quad x < 3 \\ -x + 8 & \text{se} \quad x \geq 3 \end{cases}$ é derivável em $x = 3$ e esboce o gráfico.

21. Usando a definição de derivada lateral, mostre que a função f definida por $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x < 1 \\ x^2, & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$ não é derivável em $x = 1$.

22. Usando a definição de derivada lateral, mostre que a função f definida por $f(x) = \begin{cases} senx, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$ não é derivável em $x = 0$. $\left(\text{Obs.: } \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{senx}{x} = 1 \text{ e } \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0\right)$.

23. Verifique se a função $f(x) = \begin{cases} 5 - 6x & \text{se} \quad x \leq 3 \\ -4 - x^2 & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$ é derivável em $x = 3$ e esboce o gráfico.

Retas tangente e normal

24. Encontre as equações das retas tangente e normal ao gráfico da função $y = 4 - x^2$ no ponto $(1, 3)$.

25. Encontre as equações das retas tangente e normal ao gráfico da função

$f(x) = x^2 - 3x + 2$ no ponto $(3, 2)$.

26. Encontre as equações das retas tangente e normal ao gráfico da função $f(x) = 2x^3 + 2x^2 + 5$ no ponto $(-1, 5)$.

Regras de derivação

27. Calcule a derivada da função dada.

$a) f(x) = x^2 tgx + 3\sqrt[4]{5} + 5^x + x^5$ $\qquad$ $b) g(x) = \cos^3(3x^3) - e^{senx}$

$c) h(x) = \left(\dfrac{2x-1}{1-3x}\right)^3 + (3x+8)\sec x$ $\qquad$ $d) t(x) = \sqrt[3]{x + tg(\sqrt{x})}$.

28. Calcule a derivada da função dada, simplificando o resultado, se for possível.

$a) f(x) = \sqrt{x}\ \cos x + \dfrac{x+2}{x^2+1}$ $\qquad$ $b) g(x) = tg^3(6x^3) + e^{senx}$

$c) h(x) = 2^{\cos x} + \sqrt{(x^6 + x^4 + 1)^3}$ $\qquad$ $d) H(x) = \ln(\cot gx) + \sec(x^2)$.

29. Derive a função dada.

$(a)\ f(x) = -\dfrac{x^{-3}}{3} - sen(2x) + tg(3x) + \pi^4 + \ln 5$ $\qquad$ $(b)\ g(x) = e^{(x^5+2)} \sec x - tg(9x - 8)$

$(c)\ h(x) = (\cos x - \csc x)^3 - sen^{16}x$ $\qquad$ $(d)\ t(x) = \dfrac{x^4+7}{x^4-1} + \sqrt{x^6 + 6^x}$.

30. Derive a função dada.

$(a)\ f(x) = -\dfrac{e^{-3x}}{3} + tgx + \ln 3x + 3^5 + sen\dfrac{\pi}{10}$ $\qquad$ $(b)\ g(x) = \sec^6 x - x^{-6} \cot gx^6$

$(c)\ h(x) = \ln(x^{30} - \cos(2x)) - tg^4 x$ $\qquad$ $(d)\ t(x) = \dfrac{x^2+10}{\sec x + 5} - \dfrac{2025}{\sqrt{x^4 + 4^x}}$.

31. Derive a função dada e simplifique..

$(a)\, f(x) = -\dfrac{x^{-5}}{5} - sen(5x) + tg(5x) + \pi^5 + \ln 5$ $\qquad$ $(b)\, g(x) = e^{\left(x^6+2\right)} \sec x$

$(c)\, h(x) = \ln \sqrt[8]{senx + \cos x} - sen^8 x$ $\qquad$ $(d)\, t(x) = \left(\dfrac{x^4+7}{x^4-1}\right)\left(\sqrt{x^6}\right).$

32. Calcule a derivada da função dada, simplificando o resultado, se for possível.

$a) f(x) = sen^5 x - \cos x^5$ $\qquad$ $b) g(x) = e^{\sec x} + x^2 tgx$

$c) h(x) = \left(\dfrac{3x-2}{4-5x}\right)^2 + \sqrt{4x}$ $\qquad$ $d) H(x) = \sqrt[6]{x^6+6x+1} + e^{x^9}.$

Educar é ter esperança no futuro, mesmo que o presente nos decepcione. É semear com sabedoria e colher com paciência. É ser um garimpeiro que procura os tesouros do coração.(Augusto Cury).